SoSe 2019

Übungen zur Einführung in die

Astronomie und Astrophysik II, 7

1. Im Folgenden sei eine kugelsymmetrische Galaxie angenommen. Berechnen Sie die Rotationskurve $v(r)$ für Sterne, die geordnete Kreisbewegungen mit den Radien r um das Zentrum der Galaxie ausführen (die Einzelmassen der Sterne seien gegenüber der Galaxienmasse M_{gal} vernachlässigbar). Betrachten Sie folgende Fälle:

   a) Die Galaxie werde von einem massiven Objekt der Masse M_{gal} im Zentrum dominiert.

   b) Für die Dichte der Galaxie gelte
   $$\rho(r) \propto 1/r\,.$$

   c) Der Dichteverlauf folge dem Gesetz
   $$\rho(r) = \rho_0 (r/r_0)^{-\varepsilon}\,,$$
   wobei ρ_0 die Dichte beim Radius r_0 bezeichnet. Welcher Wertebereich ist für den Exponenten ε mathematisch möglich bzw. physikalisch sinnvoll?

(3 Punkte)

2. Eine Galaxie werde durch eine zweidimensionale Scheibe mit der Flächenmassendichte σ beschrieben. Dabei soll gelten:
   $$\frac{dM}{dr} = 2\pi r \sigma(r).$$
   Was bedeutet eine *flache* Rotationskurve (d. h. $v(r) = \text{const.}$) in dem Bereich $r_1 < r < r_2$ für die Flächenmassendichte $\sigma(r)$ in diesem Radienintervall?

(2 Punkte)

3. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, das Dichteprofil der dunklen Materie in der Milchstraße zu parametrisieren. Ein gutes empirisches Modell ist durch folgende Gleichung gegeben:
   $$\rho(r) = \frac{c_0}{a^2 + r^2}$$
   mit $c_0 = 7 \times 10^8\,\mathrm{M_\odot kpc^{-1}}$ und $a = 2{,}8\,\mathrm{kpc}$.

   a) Bestimmen Sie die Masse der dunklen Materie innerhalb der Erdbahn. Welchen Einfluss erwarten Sie für die Bewegung der Erde um die Sonne? (Anmerkung: Die Dichte der dunklen Materie kann im Sonnensystem als konstant angenommen werden)

   b) Berechnen Sie die Masse der dunklen Materie innerhalb der Sonnenbahn um das Milchstraßenzentrum und vergleichen Sie diese mit dem Resultat aus Aufgabe 3b des Übungsblattes 6.

(3 Punkte)

4. Es soll ein Kugelsternhaufen mit 10^6 homogen verteilten, sonnenähnlichen Sternen betrachtet werden. Nehmen Sie an, dass alle Sterne dieselbe Geschwindigkeit von $v = 10\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ besitzen.

   a) Schätzen Sie die charakteristische Größe des Haufens ab.

   b) Wieviele Sterne befinden sich in einem Volumen von $1\,\mathrm{pc^{-3}}$? Vergleichen Sie das Ergebnis mit der Sterndichte in Sonnenumgebung ($n = 0{,}05 - 0{,}1\ \mathrm{pc^{-3}}$).

(2 Punkte)

5. In der 3. Aufgabe auf Übungsblatt 4 wurde folgende Gleichung für die zeitliche Änderung der Umlaufzeit $P(t)$ des Hulse-Taylor-Doppelpulsars hergeleitet:

$$\dot{P}(t) = -96.762 \frac{\pi^{8/3}}{c^5} \left(\frac{G M_{\mathrm{NS}}}{P(t)} \right)^{5/3} ,$$

wobei $M_{\mathrm{NS}} = 1.4 M_{\odot}$ die Masse eines Neutronensterns ist. Es handelt sich hierbei um eine nichtlineare Differentialgleichung 1. Ordnung, die in dieser Aufgabe numerisch integriert werden soll.

a) Laden Sie von STiNE das bereitgestellte Muster-Notebook herunter (falls Sie nicht mit Notebooks arbeiten, können Sie dieses auch im HTML-Format ansehen und den entsprechenden Python-Quellcode in der zip-Datei verwenden). Sie finden darin einige Informationen sowie eine Python-Funktion zur numerischen Integration eines beliebigen Anfangswertproblems 1. Ordnung mittels Runge-Kutta-Verfahren. Wenden Sie nach dem vorgegebenen Muster die Funktion `rk4_step()` zunächst auf einen exponentiellen Zerfall an und überzeugen Sie sich, dass Sie die analytische Lösung reproduzieren können.

b) Berechnen Sie die Umlaufzeit $P(t)$ für die Anfangsbedingung $P(0) = 7{,}75\,\mathrm{h}$ und stellen Sie die Lösung grafisch dar. Verwenden Sie zur iterativen Anwendung des RK4-Verfahrens eine `while`-Schleife mit geeigneter Schrittweite h und $P(t) \leq 1\,\mathrm{s}$ (d.h. kurz vor der Kollision) als Abbruchkriterium. Vergleichen Sie die sich daraus ergebende Zeitdauer bis zur Kollision mit der einfachen Abschätzung $P(0)/\dot{P}(0)$ aus Blatt 4. Warum ist die Verwendung einer `for`-Schleife mit fester Zahl von Iterationen (entsprechend einem vorgegebenen Zeitintervall) nicht ratsam?

(5 Bonuspunkte)